PART3　変数を含む定積分の最大・最小

3　$f(t)=\int_1^2 |x-t|dx$ とするとき，$f(t)$ の最小値と，最小値を与える t の値を求めよ。

Point Pickup

積分区間が $1 \leqq x \leqq 2$ であることから，絶対値記号をはずす境目である $x=t$ が

（i）積分区間より左側　　(ii)　積分区間内　　(iii)　積分区間より右側

のいずれにあるかで場合分けを行う。

第18講　PART3　確認問題

1　$f(t)=\int_{-1}^{3}|x-2t|dx$ とするとき，$f(t)$ の最小値と，最小値を与える t の値を求めよ。

$t=\dfrac{\boxed{ア}}{\boxed{イ}}$ のとき　最小値 $\boxed{ウ}$

PART3　変数を含む定積分の最大・最小

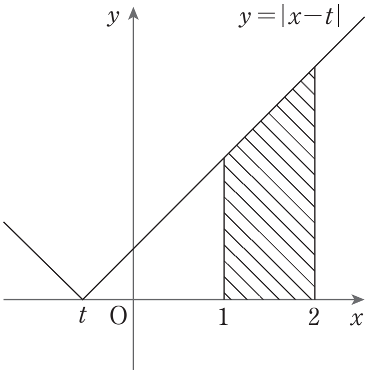
3　$f(t)=\int_1^2|x-t|dx$ とするとき，$f(t)$ の最小値と，最小値を与える t の値を求めよ。

(i)　$t\leqq 1$ のとき

$1\leqq x\leqq 2$ においては　$x-t\geqq 0$

よって

$$f(t)=\int_1^2(x-t)dx=\left[\frac{1}{2}x^2-tx\right]_1^2=-t+\frac{3}{2}$$



(ii)　$1<t<2$ のとき

$1\leqq x\leqq t$ では　$x-t\leqq 0$

$t\leqq x\leqq 2$ では　$x-t\geqq 0$

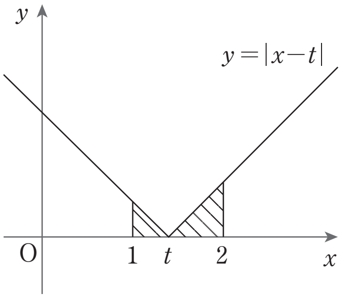
よって

$$f(t)=-\int_1^t(x-t)dx+\int_t^2(x-t)dx$$

$$=-\left[\frac{1}{2}x^2-tx\right]_1^t+\left[\frac{1}{2}x^2-tx\right]_t^2$$

$$=-\left(\frac{1}{2}t^2-t^2\right)\times 2+\left(\frac{1}{2}-t\right)+(2-2t)$$

$$=t^2-3t+\frac{5}{2}$$

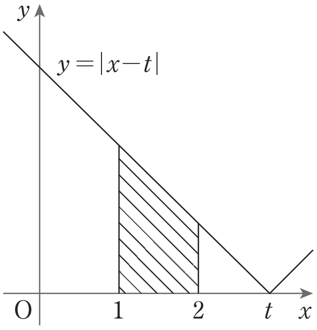


(iii)　$2\leqq t$ のとき

$1\leqq x\leqq 2$ においては　$x-t\leqq 0$

よって

$$f(t)=-\int_1^2(x-t)dx=-\left[\frac{1}{2}x^2-tx\right]_1^2=t-\frac{3}{2}$$

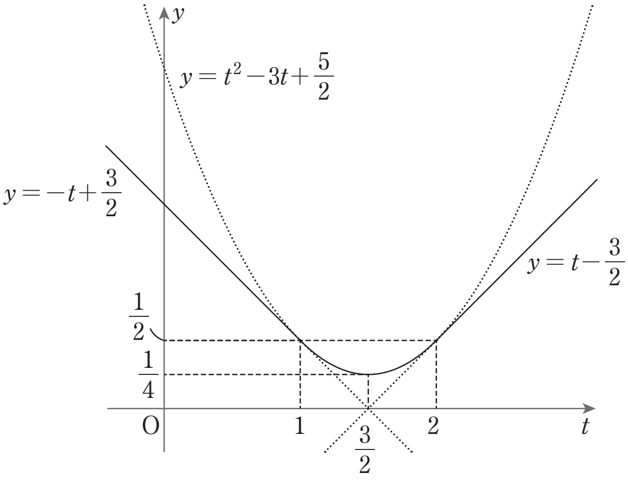


(i)～(iii)より

$$f(t)=\begin{cases} -t+\dfrac{3}{2} & (t \leqq 1) \\ t^2-3t+\dfrac{5}{2}=\left(t-\dfrac{3}{2}\right)^2+\dfrac{1}{4} & (1<t<2) \\ t-\dfrac{3}{2} & (2 \leqq t) \end{cases}$$

よって，$y=f(t)$ のグラフは下図。

したがって，$f(t)$ は $t=\dfrac{3}{2}$ で最小値 $\dfrac{1}{4}$ をとる。



第18講　PART3　確認問題 解答

1

[正解] ア：1，イ：2，ウ：4

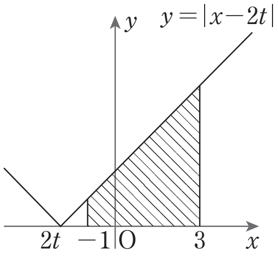
[解説]

(i)　$2t \leqq -1$ すなわち $t \leqq -\dfrac{1}{2}$ のとき [A]

$-1 \leqq x \leqq 3$ では　$x-2t \geqq 0$

よって

$$f(t)=\int_{-1}^{3}(x-2t)dx$$
$$=\left[\frac{1}{2}x^2-2tx\right]_{-1}^{3}$$
$$=-8t+4$$



> [A]　絶対値記号をはずす境目（この問題では $x=2t$）が
> (i)　積分区間より左側
> (ii)　積分区間内
> (iii)　積分区間より右側
> のいずれにあるかで場合分けを行う。

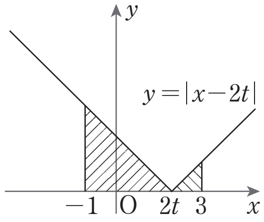
(ii)　$-1<2t<3$ すなわち $-\dfrac{1}{2}<t<\dfrac{3}{2}$ のとき

$-1 \leqq x \leqq 2t$ では　$x-2t \leqq 0$

$2t \leqq x \leqq 3$ では　$x-2t \geqq 0$

よって

$$f(t)=\int_{-1}^{2t}-(x-2t)dx+\int_{2t}^{3}(x-2t)dx$$

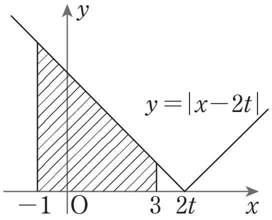


$$=-\left[\frac{1}{2}x^2-2tx\right]_{-1}^{2t}+\left[\frac{1}{2}x^2-2tx\right]_{2t}^{3}$$
$$=-\frac{1}{2}(4t^2-1)+2t(2t+1)+\frac{1}{2}(9-4t^2)-2t(3-2t)$$
$$=4t^2-4t+5$$
$$=4\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+4$$

(iii)　$3 \leqq 2t$ すなわち $\dfrac{3}{2} \leqq t$ のとき

$-1 \leqq x \leqq 3$ では　$x-2t \leqq 0$

よって



$$f(t)=\int_{-1}^{3} -(x-2t)\,dx$$

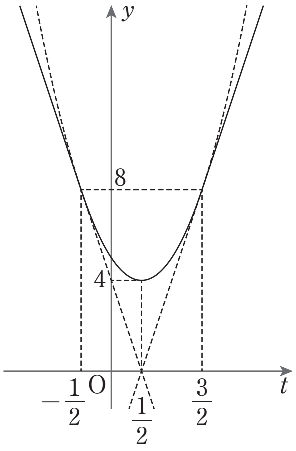
$$=-\left[\frac{1}{2}x^2-2tx\right]_{-1}^{3}$$

$$=8t-4$$

(i)〜(iii)より

$$f(t)=\begin{cases} -8t+4 & \left(t \leqq -\dfrac{1}{2}\right) \\ 4\left(t-\dfrac{1}{2}\right)^2+4 & \left(-\dfrac{1}{2} < t < \dfrac{3}{2}\right) \\ 8t-4 & \left(\dfrac{3}{2} \leqq t\right) \end{cases}$$

よって，$y=f(t)$ のグラフは次図。



したがって，$f(t)$ は $\boldsymbol{t=\dfrac{1}{2}}$ **で最小値 4** をとる。